

応答スペクトルについて

■ 1 自由度系の運動方程式

1 自由度系の運動方程式を以下に示す.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_G \quad (1)$$

ここで, m は質量, c は減衰定数, k はバネ剛性, x は相対変位, $\dot{x}$ は相対速度, $\ddot{x}$ は相対加速度, $\ddot{x}_G$ は地動加速度である. 上式の両辺を m で割り, 式(2)を使って整理すると式(3)のようになる.

$$k/m = \omega_0^2, \quad c/m = 2h\omega_0, \quad \ddot{x}_G = a_G \quad (2)$$

$$\ddot{x} + 2h\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = -a_G \quad (3)$$

ここで, h は減衰比(無次元), ω_0 は固有角振動数(rad/s), a_G は地動加速度である. 固有周期 T_0 (s) は, $\omega_0 = 2\pi/T_0$ の関係にある. 地動加速度は, 加速度計で観測された地震記録に対応し, 現在は, K-net(防災科学技術研究所)などから, インターネットを介して入手できる.

構造物のパラメータ (T_0 , h) が決まり, 地動加速度が与えられれば, 構造物の応答($\ddot{x}$, $\dot{x}$, x)は式(3)により, 一意的に決まる.

■ 応答スペクトルの定義

応答スペクトルは, 1 自由度系の最大応答値を縦軸に, 横軸に固有周期にとって描いた曲線のことである. 減衰比 h はパラメータとなる. したがって, h が変われば応答スペクトルの形状は変わる. 一般に, $h=0.05$ が使われることが多い. 応答スペクトルには, 加速度応答スペクトル, 速度応答スペクトル, 変位応答スペクトルの 3 種類がある. それぞれは, 以下の式で定義される.

加速度応答スペクトル: $S_A(T_0, h) = \max[|\ddot{x} + a_G|]$

速度応答スペクトル: $S_V(T_0, h) = \max[|\dot{x}|]$

変位応答スペクトル: $S_D(T_0, h) = \max[|x|]$

$| \quad |$ は絶対値である. 加速度応答スペクトルでは絶対加速度をとることに注意すること. 式(3)を変形すると次式のようになる.

$$(\ddot{x} + a_G) + 2h\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad (4)$$

繰り返しになるが, 一自由度系の運動は上式に支配され, 左辺各項の和が常に 0 になるように振動するわけである. 応答スペクトルは, 各項の最大値に対応する.

応答スペクトルは, 構造物からみた地震動の性質を表したもので工学的に重要なツールである. また, 構造物の固有周期がわかれば, その地震記録でどの程度の応答値が得られるか, 概略的に知ることができる.

例題 1 図 1 に示した波形の応答スペクトルを求めよ。

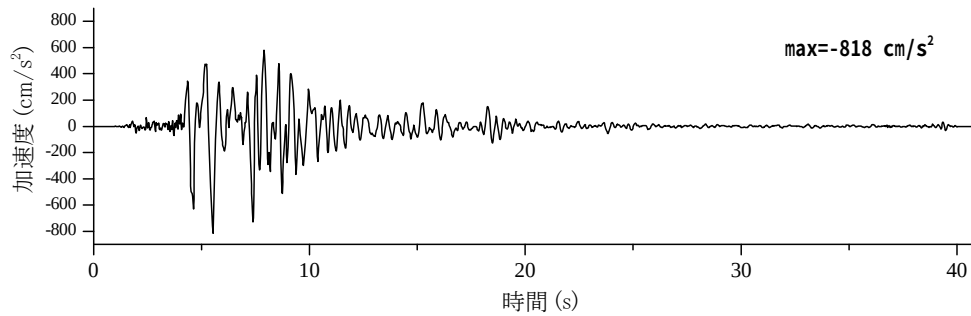
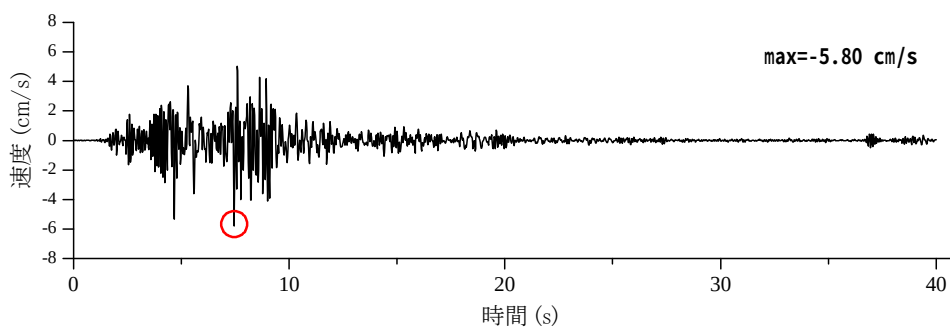
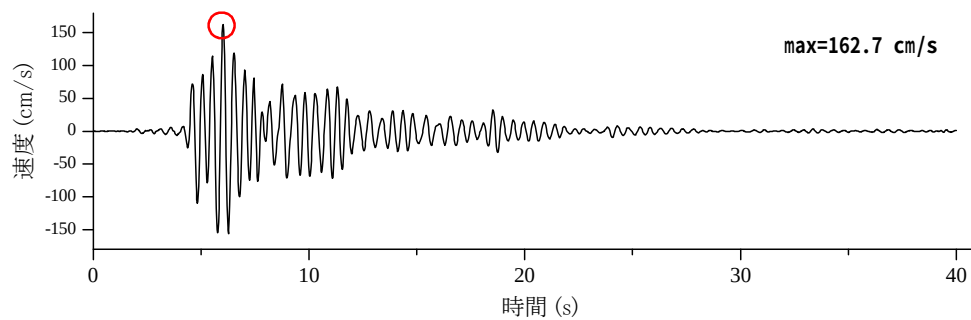


図 1 1995 年兵庫県南部地震のときに神戸海洋気象台で観測された南北方向の地動加速度

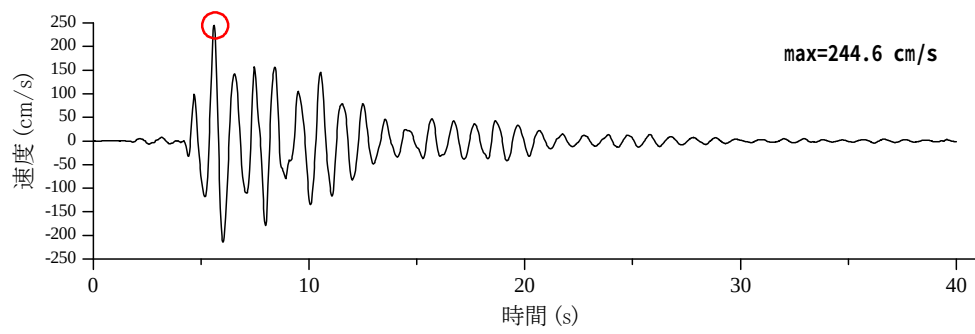


(a) $T_0 = 0.1$ 秒

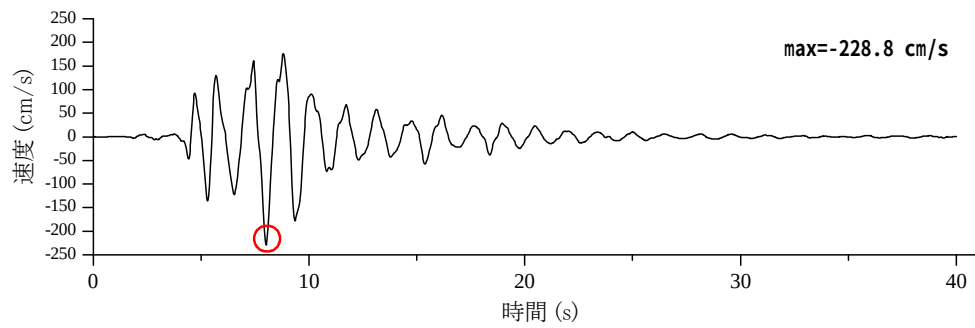


(b) $T_0 = 0.5$ 秒

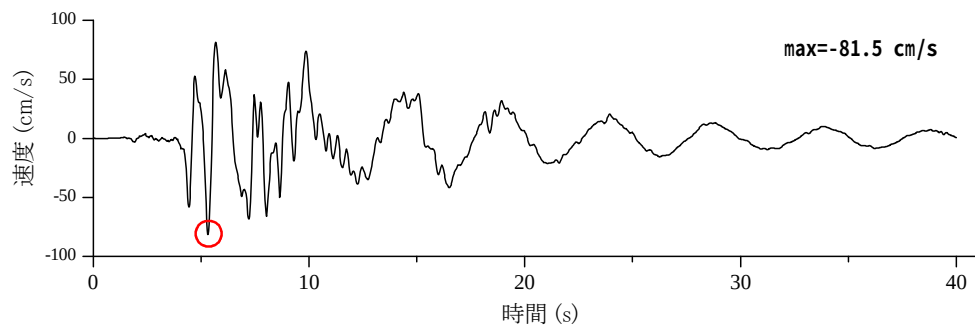
図 2 各固有周期 T_0 における 1 自由度系の相対速度 $\dot{x}$ (減衰比 h は 0.05 とする)
(解法: Runge-Kutta 法)



(c) $T_0 = 1.0$ 秒



(d) $T_0 = 1.5$ 秒



(e) $T_0 = 5.0$ 秒

図2 (続き) 各固有周期 T_0 における1自由度系の相対速度 $\dot{x}$ (減衰比 h は0.05とする)
(解法: Runge-Kutta 法)

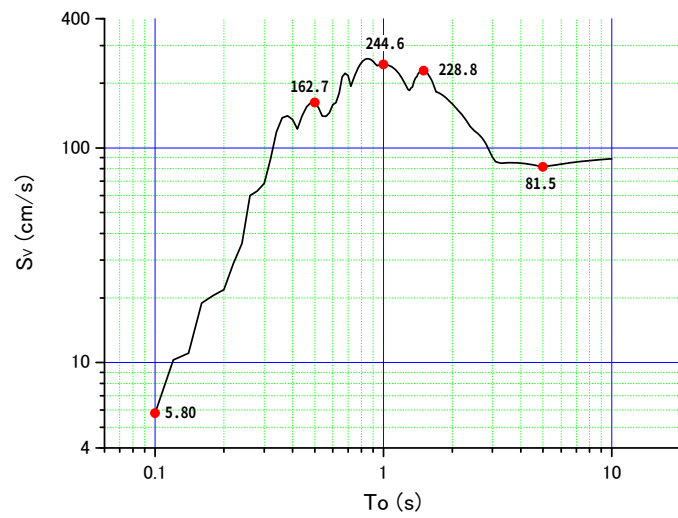


図3 速度応答スペクトル ($h=0.05$)

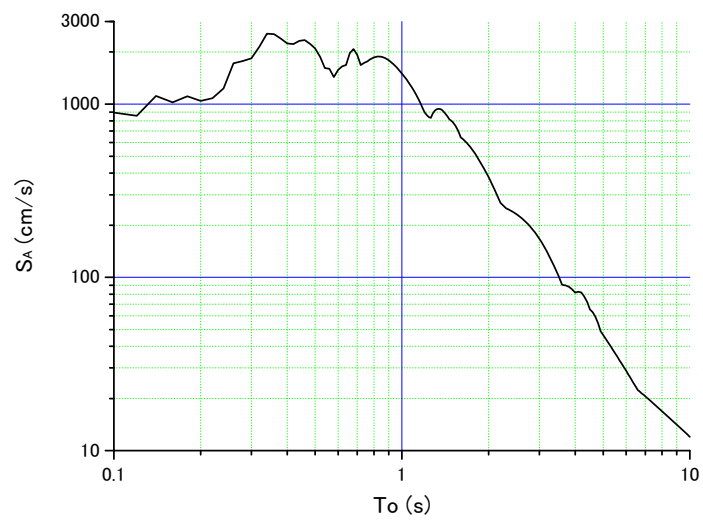


図4 加速度応答スペクトル ($h=0.05$)

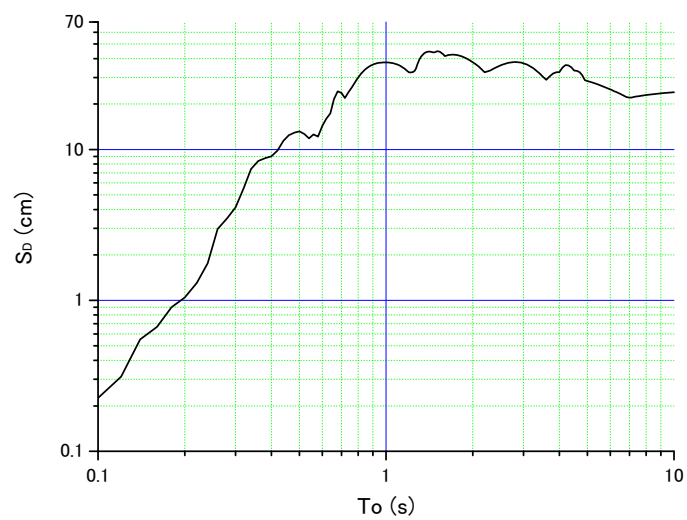


図5 変位応答スペクトル ($h=0.05$)

■疑似応答スペクトル

応答スペクトル間には以下のような近似的な関係がある．

$$\begin{aligned} S_D &\approx S_V / \omega_0 \approx S_A / \omega_0^2 \\ S_V &\approx \omega_0 S_D \approx S_A / \omega_0 \\ S_A &\approx \omega_0 S_V \approx \omega_0^2 S_D \end{aligned} \quad (5)$$

このように応答スペクトルから上式の関係を用いて求められる応答スペクトルを疑似応答スペクトルという．なお，設計用の応答スペクトルとして，以下の疑似速度応答スペクトル S_{pV} が用いられることも多い．

$$S_{pV} = S_A / \omega_0 \quad (6)$$

例題 2 図 3～5 の応答スペクトルと式(5)を用いて近似的に得られる疑似応答スペクトルを求め，比較せよ．

結果を図 6～8 に示す．各図とも 3 本の線は全体の傾向は似ていることがわかる．特に， $S_D \approx S_A / \omega_0^2$ ， $\omega_0 S_D \approx S_A / \omega_0$ ， $S_A \approx \omega_0^2 S_D$ の一致度は高い．

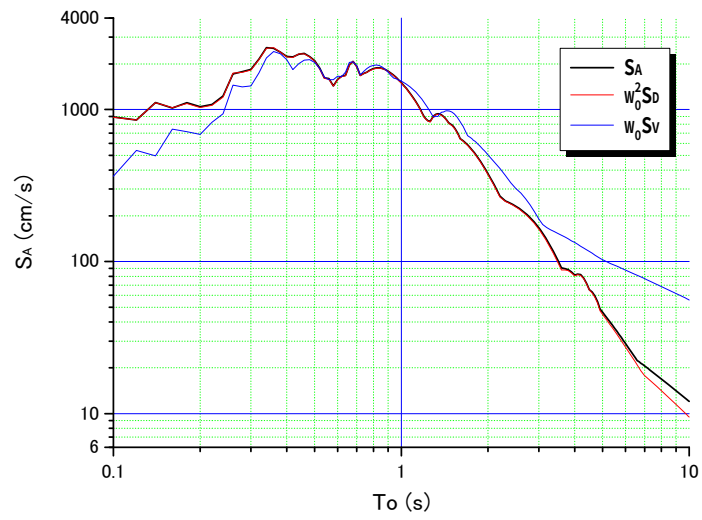


図6 加速度応答スペクトル ($h=0.05$)

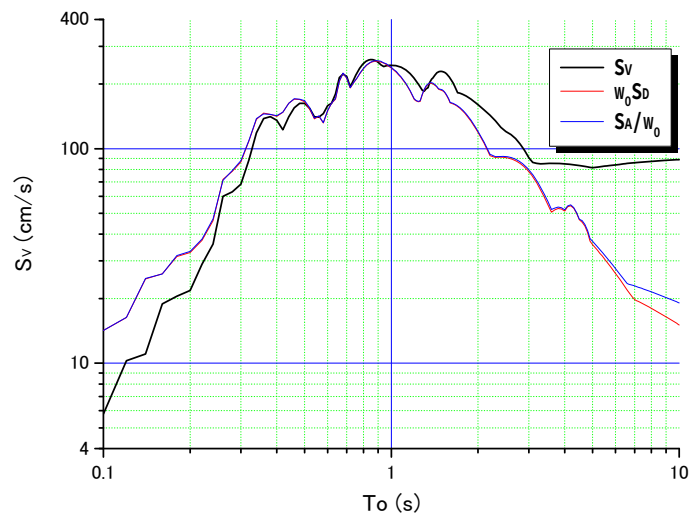


図7 速度応答スペクトル ($h=0.05$)

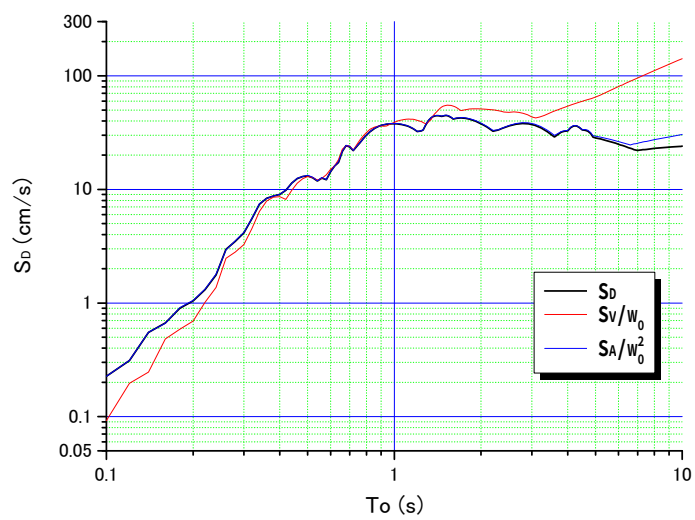


図8 変位応答スペクトル ($h=0.05$)

■ 1 自由度系の応答を求める方法（時刻歴領域）

ここでは、もっとも簡単な $x(t)$ の求め方を示す．中央差分法を使えば、 $\ddot{x}, \dot{x}$ は以下のように求まる．

$$\dot{x}_n = \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2\Delta t} \quad (7)$$

$$\ddot{x}_n = \frac{\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} - \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{\Delta t^2} \quad (8)$$

ここで、 $\ddot{x}_n, \dot{x}_n, x_n$ は時刻 t_n における加速度、速度、変位である．式(8)、(7)がそれぞれ加速度、速度の次元になっていることを確認すること．速度は微小時間における変位の変化率であり、加速度は速度の変化率である．したがって、加速度も、速度も式(8)、(7)のように変位の変化率で表される．また、これらは、常に式(3)を満たしている．

$$\frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{\Delta t^2} + 2h\omega_0 \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2\Delta t} + \omega_0^2 x_n = -a_{Gn} \quad (9)$$
$$n = 0, 1, 2, \dots$$

a_{Gn} は地震記録であるので既知である． $x_{-1} = x_0 = 0$ とすると、式(9)から x_1 が求まる．次の x_2 は x_0 と今求まった x_1 から求まる．これを繰り返すことにより、順次 x_n が求まる．また、加速度、速度は、式(8)、(7)を使うことにより求めることができる．

演習 1 式(9)を「 $x_{n+1} =$ 」の式に変形せよ．次に、本講義の WEB から JMA 神戸波（NS 成分）をダウンロードし、エクセルの表計算を用いて、 $x_{n+1}, \dot{x}_{n+1}, \ddot{x}_{n+1}$ ($n=0,1,2,\dots$) を求めよ．次に、図 2 と同じ条件 (T_0, h) で $x_{n+1}, \dot{x}_{n+1}, \ddot{x}_{n+1}$ ($n=0,1,2,\dots$) 計算し、比較せよ．なお、図 2 は、Runge-Kutta 法で作成された応答計算ソフト (runge-kutta-response.xls) を用いている．これは、本講義の WEB サイトからダウンロードできるのでぜひ試みよ．

補足 1：Runge-kutta 法は時刻歴数値積分の代表的に解法で、中央差分法よりも誤差が少なくなるように工夫されている．

補足 2：式(9)は $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$ という形になった．このように過去のデータだけで、次のステップの値 (x_{n+1}) を決める方法を陽解法（例えば、中央差分法、Runge-kutta 法）という． x_{n+1} を仮定して、計算から得られる x_{n+1} とが収束するまで繰り返し計算する方法を陰解法（例えば、Newmark の β 法など）という．なお、線形微分方程式であれば、陰解法も陽解法へ変形できる．

補足 3： $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$ のように時系列のデータの処理により、各種フィルターをかけることができる．フィルターには、ローカットフィルター、ハイカットフィルター、バンドパスフィルター、微分フィルターなどがあり、これらをデジタルフィルターと呼ぶこともある．

■ 1 自由度系の応答を求める方法（周波数領域）

式(3)の相対変位 x ，地動加速度 a_G を逆フーリエ変換を用いて以下のように表すことができる．

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ a_G(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_G(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここで， $X(\omega)$ ， $A_G(\omega)$ はそれぞれ x ， a_G のフーリエ変換である．上式を式(3)に代入する．

重要：逆フーリエ変換に対する積分，微分は右辺の EXP 関数の微積となる

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \text{微分} & \begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ \dot{x}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ \ddot{x}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -\omega^2 X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} & \uparrow \text{積分} \end{array}$$

したがって，例えば，加速度記録のフーリエ振幅スペクトルは， ω で割ることで速度記録のフーリエ振幅スペクトルとなる．

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^2 X(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \frac{2h\omega_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega) X(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \frac{\omega_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-\omega^2 + 2ih\omega_0\omega + \omega_0^2) X(\omega) e^{i\omega t} d\omega = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_G(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (11)$$

$$X(\omega) = \frac{-A_G(\omega)}{-\omega^2 + 2ih\omega_0\omega + \omega_0^2} = \frac{A_G(\omega)}{\omega^2 - 2ih\omega_0\omega - \omega_0^2} \quad (12)$$

したがって， $x(t)$ は次式より求められる．

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_G(\omega)}{\omega^2 - 2ih\omega_0\omega - \omega_0^2} e^{i\omega t} d\omega \quad (13)$$

上式からわかるように，構造物の地震応答変位は，地動加速度のフーリエ変換に $1/(\omega^2 - 2ih\omega_0\omega - \omega_0^2)$ をかけて，フーリエ逆変換することにより得られる．なお， $1/(\omega^2 - 2ih\omega_0\omega - \omega_0^2)$ は，**伝達関数**あるいは**周波数応答関数**と呼ばれ，振動数領域での入力に対する出力の比を表している．

例題 3 1995 年兵庫県南部地震のときに神戸海洋気象台で観測された南北方向の地動加速度（以下，神戸波）に対する，固有周期 $T_0 = 1$ sec，減衰比 $h = 0.05$ の 1 自由度系の構造物の応答変位を求めよ．

下図に示した手順により応答変位を得ることができる．(b)からこの地震波形には 0.5～3 Hz の振動数成分が多いことがわかる．(c)は $T_0 = 1$ sec， $h = 0.05$ における伝達関数を示しており，振動数 1 Hz から離れると急激に小さくなる関数であることがわかる．したがって，(d)に示す応答変位のフーリエ振幅スペクトルは，振動数 1 Hz にピークを持つことになる．このため，に示す応答変位は周期

約 1 秒で振動することになる．つまり， $T_0 = 1$ sec の構造物は，地震動に含まれる周期 1 秒付近の振動数成分にのみ応答していると考えることができる．

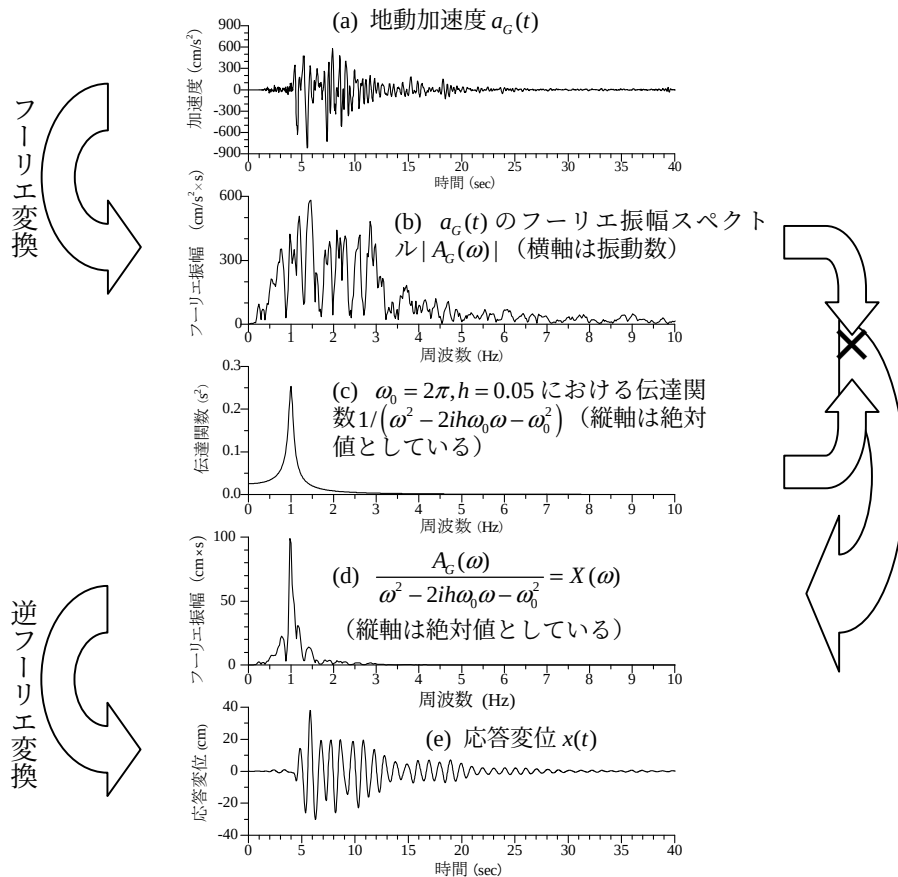


図 9 周波数領域での地震応答を求める手順

例題 4 固有周期 1 秒， $h=0.05$ の 1 自由度振動系の，神戸波に対する相対変位を中央差分法，Runge-kutta 法，フーリエ変換を用いた方法で求め，比較せよ．

図 10 に示すように 3 者はほぼ同様の結果を示した．

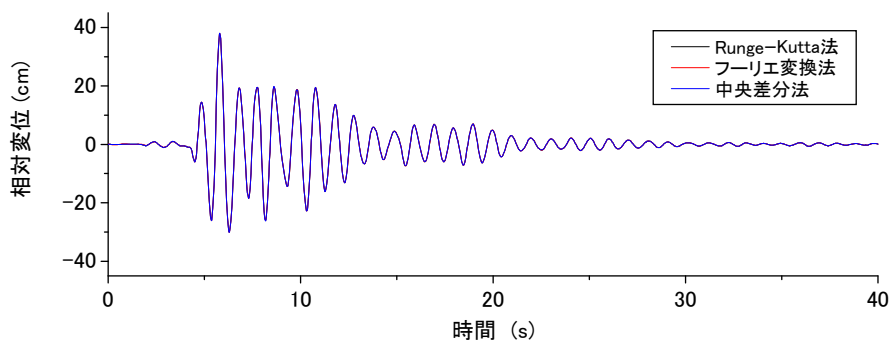


図 10 数値積分法の比較

演習 2 フーリエ変換を用いた 1 自由度系の応答を求める Fortran プログラム (oft.f) を作成し、エルセントロ波に対する固有周期 1 秒、 $h=0.05$ の構造物の速度応答 $\dot{x}(t)$ を求めよ。次に、Runge-kutta 法、中央差分法の結果と比較せよ。