

## 2. 構造物の地震応答理論 ( 1 )

構造物の地震応答理論を数回の講義で行う。

### 2-1 本章の目的

地震時に複雑に動く構造物もコンピューターを用いた数値解析である程度再現することができる。これは、地震応答理論が完成しているからである。エンジニアは、この理論を用いて、構造物を設計している。

構造物の変位が小さい範囲内では、構造物は弾性的挙動 ( 図 2-1 参照 ) となる。しかし、変位が大きくなるとコンクリートや鉄筋は塑性化するため、その挙動は非線形挙動となる。現在の技術を持ってしても、非線形挙動を予測するのは一般に難しい。これは、線形領域の性質は数式で表現できるが、非線形領域の性質を数式で表現するのは非常に難しいからである。(補足：非線形領域の力と変形の関係は、実験によって求められている。線形領域を含め、力と変形のことを構成則と呼ぶ。構成則は、コンピュータによる構造計算の中に組み込まれるため、比較的単純な関数および規則が用いられている。)

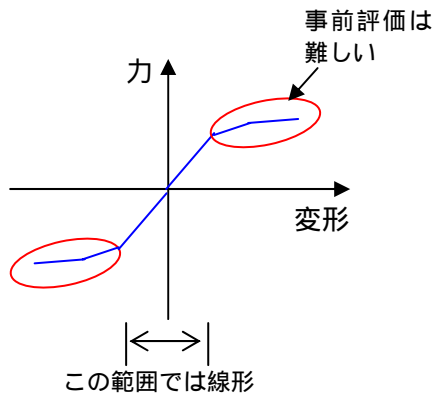
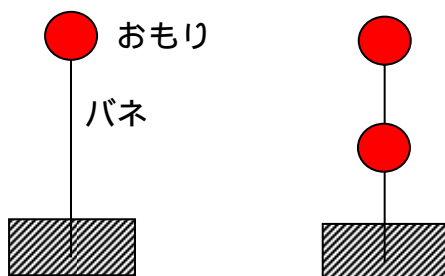


図 2-1 構造物に加えた力と変形の関係

本講義では、構造物の弾性範囲内での振動を扱う。また、構造物としては、図 2-2(a) のような、それぞれ 1 個のおもり、バネからなるものを扱う。これを 1 自由度振動系モデルという。なお、おもりが 2 個になると 2 自由度になる ( 図 2-2(b) )。



(a) 1 自由度系 (b) 2 自由度系  
図 2-2 振動モデル

1自由度振動系モデルは単純すぎるのでは、と思うかもしれないが、構造物の振動の性質をかなり表すことができる。また、多自由度系の振動モデルも基本的には1自由度系の集合体とみなすこともでき、1自由度系の理解は多自由度系の振動系を考える上でも非常に重要である。

(補足) 多自由度系の振動を扱う理論としてモード解析法がある。モードとは、ファッション用語と同様で、主流、最頻値といった意味である。多自由度系では、おもりの数と同じ数の振動モードをもつ。複雑な振動もこの振動モードの組み合わせである。逆に言えば、複雑な振動も、単純な有限個の振動モードに分解できる。つまり、振動は複雑そうでも本質は単純なのである。興味のある学生は、是非、モード解析を勉強して欲しい。モード解析について書かれてある本はたくさんある。ちなみに私が学生時代に勉強した本は、片山、宮田、国井著：構造物の振動解析，技法堂出版である。

## 2-2 構造物の1自由度系へのモデル化

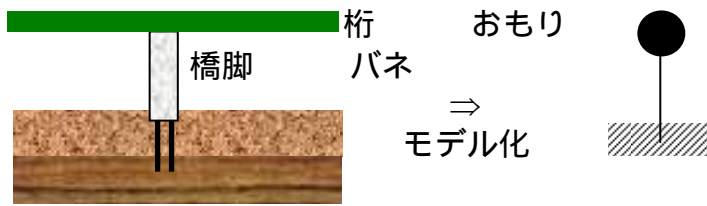


図 2-3 橋脚のモデル化

図 2-3 の橋脚も振動モデルに置き換えることができる．最も簡単なモデルは，図の右側のおもりと（板）バネである．おもりの質量は桁の質量と橋脚の部分の質量の 80% とを合わせた質量とする．一方，橋脚がバネとなる．また，バネの質量は無視される．では，バネ定数はどうやって求めるか？

### 2-3 バネ定数の求め方

バネ定数  $k$  はバネに力  $P$  を加えたとき， $x$  だけ動いた場合，

$$k=P/x \quad (2.1)$$

で与えられる．したがって， $k$  の次元は〔力/長さ〕で，例えば，〔N/m〕で表される．

橋脚は図 2-4 のような片もち梁とみなすことができる．ただし，梁の質量はおもりの質量として考慮するので，バネ定数を求める際は無視する．上部構造の慣性力は，梁の自由端にかかるとする．今，梁の先端に力  $P$  を加え，そのときの変位を  $x$  とする．バネ定数  $k$  は  $P/x$  となる．では， $P$  を加えたとき  $x$  はどうなるか．

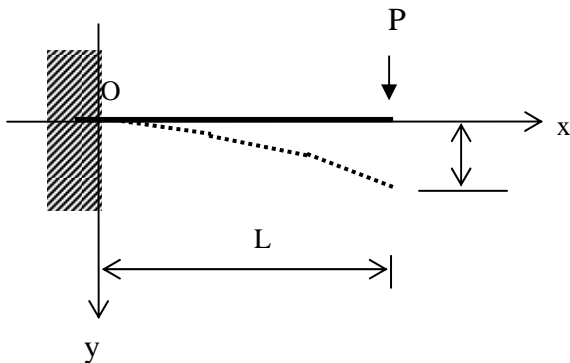


図 2-4 片もち梁

2-4 変位 の求め方 (構造力学の復習：10 分間，各自解いてもらう，必要に応じてヒント：式(2.2))

座標  $x$  における梁の下方方向への変位を  $y$  とおくと，たわみ曲線の微分方程式から

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (2.2)$$

となり，この微分方程式を解くことにより変位 を求めることができる．ここで， $E$  はヤング率で， $I$  は断面 2 次モーメント， $M$  は  $x$  における曲げモーメントである．

次に式(2.2)を解いてみる．

$$M(x) = -PL + Px \quad (2.3)$$

である．上式を(2.2)に代入する．

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{-PL + Px}{EI} \quad (2.4)$$

上式の両辺を  $x$  に関して 1 回積分する．

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-PLx + Px^2/2}{EI} + c_1 \quad (2.5)$$

さらにもう 1 回積分する．

$$y = -\frac{-PLx^2/2 + Px^3/6}{EI} + c_1x + c_2 \quad (2.6)$$

ここで， $c_1, c_2$  は積分定数である．境界条件は，

$$\frac{dy(0)}{dx} = 0 \quad (2.7)$$

$$y(0) = 0 \quad (2.8)$$

より， $c_1=0, c_2=0$  となる．したがって，たわみ  $y$  は

$$y = -\frac{-PLx^2/2 + Px^3/6}{EI} \quad (2.9)$$

となる．梁の先端での変位 は

$$\delta = y(L) = -P \frac{-L^2/2 + L^3/6}{EI} = \frac{PL^3}{3EI} \quad (2.10)$$

## 2-5 結局、バネ定数 $k$ は？

したがって、バネ定数  $k$  は、

$$k = P / \delta = 3EI / L^3 \quad (2.11)$$

となる。ここで、次元のチェックをしてみよう。

$E$ は  $[N/m^2]$ 、 $I$ は  $[m^4]$ 、 $L^3$ は  $[m^3]$  なので、  
 $EI/L^3$ は  $[N/m^2][m^4] / [m^3] = [N/m]$  となり、バネ定数の次元と一致している。

**(重要)** このように式の次元をチェックするのは非常に大切である。例えば、公式集などに載っている式の次元チェックは必ずした方がよい。誤植があるかもしれないからである。この WEB テキストも然り。

## 2-6 バネの固有周期について

バネに変位を与えて手を離すと一定の周期で振動する。この周期を固有周期といい、バネ定数とおもりの質量  $M$  で決まる。式の誘導は後で学ぶこととするが、式を先に示すと次の通りとなる。

$$T = 2\pi\sqrt{M/k} \quad (2.12)$$

$$M = M_U + 0.8M_P$$

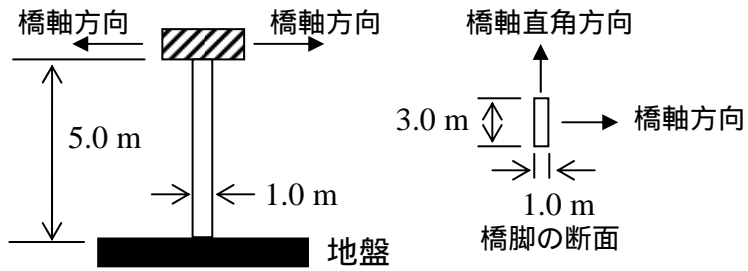
ここで、 $T$ は固有周期である。 $M_U$ は上部構造の質量、 $M_P$ は橋脚躯体部分の質量である。上記と同じように次元のチェックをしてみる。なお、単位  $N$ は  $kg \cdot m/s^2$ である。

$$\sqrt{M/k} = \sqrt{\frac{[kg]}{[N/m]}} = \sqrt{\frac{[kg][m]}{[kg \cdot m/s^2]}} = \sqrt{[s^2]} = [s] \quad (2.13)$$

したがって、式(2.12)は両辺とも時間の関数となっていることが分かる。

**(重要)** 式(2.12)を感覚的に理解して欲しい。例えば、質量  $M$  は分子にきているので、 $M$  が大きくなると固有周期は延びることが分かる。一方、 $k$  は分母にあるので、 $k$  が大きくなると固有周期は短くなることが分かる。これらは、感覚的に納得できると思う。次元のチェックでも式の間違いをを見つけるのに役に立つが、このようにパラメータ ( $M$  や  $k$  などの変数のこと) の増減を考えて、感覚とあっているか、どうかということをチェックすることも、式の間違いに気づくために非常に大事である。そうすれば、 $T = 2\pi\sqrt{k/M}$  と書いてしまうことはなくなる。

2-7 例題 (20 分間)



図のようなコンクリート橋脚を考える．上部構造（斜線の部分）の質量は 11.2 ton とする．  
 コンクリートの単位体積あたりの質量を  $2.4\text{t/m}^3$ ，ヤング率  $E$  を  $E=2.0 \times 10^{10}\text{ N/m}^2$  とする．  
 橋軸方向，橋軸直角方向のバネ定数  $k$  を求めよ．  
 橋軸方向，橋軸直角方向の固有周期  $T$  を求めよ．

### 解答例

#### 橋軸方向

$$\text{橋軸方向の } I \text{ は, } I = \frac{3.0 \times 1.0^3}{12} = 0.25[m^4]$$

したがって、橋軸方向の  $k$  は、

$$k = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3 \times 2.0 \times 10^{10} \times 0.25}{5.0^3} = 1.2 \times 10^8 [N/m]$$

おもりに対応する質量  $M$  は、

$$M = 11200 + 0.8 \times 3.0 \times 1.0 \times 5 \times 2400 = 40000 [\text{kg}]$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{40000}{1.2 \times 10^8}} = 0.12 [s]$$

#### 橋軸直角方向

$$\text{橋軸直角方向の } I \text{ は, } I = \frac{1.0 \times 3.0^3}{12} = 2.25[m^4]$$

したがって、橋軸直角方向の  $k$  は、

$$k = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3 \times 2.0 \times 10^{10} \times 2.25}{5.0^3} = 1.08 \times 10^9 [N/m]$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{40000}{1.08 \times 10^9}} = 0.038 [s]$$